

# T.P 10 : Résolution de l'équation différentielle du mouvement par la méthode d'Euler

## Objectifs:

- Enregistrer la chute verticale d'un solide dans du glycérol.
- Mise en évidence d'une vitesse limite.
- Effectuer un traitement informatique pour tracer la courbe  $v=f(t)$  d'une bille en chute dans un fluide.
- A l'aide d'une méthode de résolution numérique d'équation différentielle (la méthode d'Euler), choisir un modèle adapté.

## A - Réalisation et traitement de la vidéo.

- Mesurer la hauteur de l'éprouvette ou d'un solide de référence qui permettra de déterminer l'échelle de la vidéo lors du traitement sur ordinateur.

*Déterminer la masse et le diamètre de la bille d'acier utilisée.*

- Paramétrer le logiciel CINERIS. (**12 images/seconde - durée 10 s**)
- Lancer l'acquisition ; attendre 4 ou 5 secondes, puis lâcher la bille, sans vitesse initiale.
- Relever, dans CINERIS, les positions successives du centre de gravité de la bille.
- Afficher le graphique  $y = f(t)$ .

*Commenter ce graphique*

- **Traitement des données** : quelle fonction peut-on utiliser pour calculer la vitesse instantanée de la bille ?
- Afficher le graphe  $v = f(t)$ .

*Déterminer la vitesse limite atteinte par la bille.*

- Afficher le tableau des valeurs expérimentales  $t$  ;  $x$  ;  $v$ .
- Enregistrer.

## B - Etude dynamique de la chute de la bille

- Préciser le système étudié et le référentiel choisi.

Faire l'inventaire des forces extérieures appliquées à la bille sachant qu'en plus du poids:

- Un corps totalement immergé dans un fluide subit une force  $\vec{\Pi}$  appelée Poussée d'Archimède qui a les caractéristiques suivantes:
  - Direction: verticale
  - Sens: vers le haut
  - Valeur:  $\Pi = \text{poids du volume du fluide déplacé}$

$$\Pi_A = \rho \cdot V \cdot g \text{ avec } \begin{cases} \Pi \text{ en Newton} \\ \rho \text{ masse volumique du fluide en } \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ V \text{ volume du solide en } \text{m}^3 \\ g \text{ intensité de pesanteur en } \text{N} \cdot \text{kg}^{-1} \end{cases}$$

- Un solide en mouvement dans un fluide est soumis à une force de frottement  $\vec{f}$  qui a les caractéristiques suivantes:
  - Direction: celle du vecteur vitesse.
  - Sens: opposé à celui du vecteur vitesse
  - Valeur:

$$f = k \cdot v^n \text{ avec } \begin{cases} k \text{ coefficient de frottement qui dépend de la viscosité du fluide} \\ v \text{ vitesse du solide} \\ n = 1 \text{ ou } 2 \text{ selon les paramètres de l'expérience} \end{cases}$$

- Appliquer la deuxième loi de Newton et établir l'équation différentielle qui représente l'évolution de la vitesse  $v$  en fonction du temps.

Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme :  $\frac{dv}{dt} = B - Av^n$ . Déterminer  $A$  et  $B$

Que devient cette équation quand la vitesse atteint la valeur limite ?

### C - Résolution de l'équation par la méthode d'Euler.

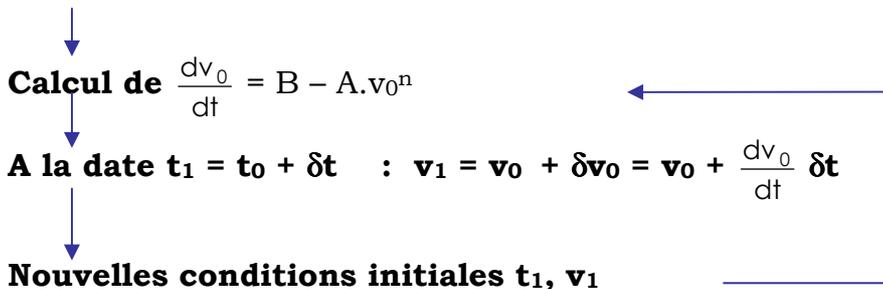
Plutôt que de rechercher l'expression mathématique de la fonction  $v = f(t)$ , on utilise une méthode numérique itérative appelée **méthode d'Euler**.

#### Principe de la méthode :

On sait que  $\frac{dv}{dt} = B - A.v^n$

Si on connaît les valeurs de **A et de B ainsi que les conditions initiales**, on peut trouver de proche en proche les différentes valeurs de  $v$  au cours du temps.

**Conditions initiales  $t_0, v_0$**



En utilisant la méthode d'Euler, compléter le tableau ci-dessous, en prenant  $n = 1$  et un pas de 0,2.

<b>t</b>	<b>v</b>	<b><math>\frac{dv}{dt}</math></b>
0	$v_0 =$	$\frac{dv_0}{dt} =$
0.2	$v_1 =$	$\frac{dv_1}{dt} =$
0.4	$v_2 =$	$\frac{dv_2}{dt} =$

#### Préparation du tableur

- Ouvrir **Excel. Fichier « simulation Euler »**
- L'objectif est de superposer **sur le même graphe**, les résultats expérimentaux et les résultats de la méthode d'Euler, afin de pouvoir les comparer, et d'étudier l'influence des différents paramètres.
- Préparer le tableur en inscrivant les valeurs constantes et les conditions initiales qui correspondent à la chute de la bille en acier .

Données : coefficient de frottement  $k = \dots\dots\dots \text{kg.s}^{-1}$   
 masse de la bille :  $\dots\dots\dots \text{g} = \dots\dots\dots \text{kg}$   
 masse volumique du liquide :  $\rho = 1,255 \text{ g.mL}^{-1} = \dots\dots\dots \text{kg.m}^{-3}$   
 diamètre de la bille en acier :  $\dots\dots\dots \text{mm} = \dots\dots\dots \text{m}$   
 pas de discrétisation temporelle  $\delta t = 0,03\text{s}$   
 valeur du champ de pesanteur  $g = 9,81 \text{ N.kg}^{-1}$

A partir de là, il est possible de faire varier l'exposant ( $n$ ) de la vitesse et  $k$  pour se rapprocher le plus de la courbe expérimentale.

**Comparer la courbe expérimentale et la courbe d'Euler ; donner la modélisation de la force de frottement la plus correcte. Déterminer le temps caractéristique  $\tau$ .**